PROBLEME

A)1/ Désignons par D le domaine de définition de f.

$x \in D \Leftrightarrow 1+2x > 0 \Leftrightarrow 2x > -1 \Leftrightarrow x > -\frac{1}{2}$.

D'où $D=]-\frac{1}{2};+\infty[$.

La fonction $(x \mapsto 1+2x)$ est dérivable et strictement positive sur D

$\Rightarrow f : x \mapsto \text{Log}(1+2x)$ est dérivable sur D.

$\bullet \forall x \in]-\frac{1}{2};+\infty[; f'(x) = \frac{2}{1+2x} > 0$

D'où le tableau de variation de f

x	$-\frac{1}{2}$		$+\infty$
f'(x)	|	+	
f(x)	|	↗	$+\infty$
	$-\infty$		

$\lim\limits_{\left(-\frac{1}{2}\right)^+} f = \lim\limits_{x \to \left(-\frac{1}{2}\right)^+} \ln(1+2x) = -\infty$

$\lim\limits_{+\infty} f = \lim\limits_{x \to +\infty} \text{Log}(1+2x) = +\infty$

2/a- la fonction $\varphi : x \mapsto \varphi(x)=f(x)-x$ est dérivable sur $D=]-\frac{1}{2};+\infty[$

$\forall x \in]-\frac{1}{2};+\infty[; \varphi'(x) = f'(x) - 1 = \frac{2}{1+2x} - 1 = \frac{1-2x}{1+2x}$

D'où signe de $\varphi'(x)$ est celui de $(1-2x)$.

Ce qui permet de drésser le tableau de variation de φ.

x	$-\frac{1}{2}$		0		$\frac{1}{2}$		α		$+\infty$
$\varphi'(x)$	|	+		+	0	−		−	
$\varphi(x)$	$-\infty$	↗		↗	$\ln 2-\frac{1}{2}$	↘		↘	$-\infty$

$\bullet \lim\limits_{x \to \left(-\frac{1}{2}\right)^+} \varphi(x) = \lim\limits_{x \to \left(-\frac{1}{2}\right)^+} [f(x) - x] = -\infty$.

$\bullet \lim\limits_{x \to +\infty} \varphi(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} [\, x \left(\frac{\text{Log}(x)}{x} + \frac{\text{Log}(2+\frac{1}{x})}{x} - 1\right)] = -\infty$.

$\star$ φ est continue et strictement croissante sur $]-\frac{1}{2};\frac{1}{2}]$.

$\Rightarrow \varphi$ réalise une bij. de $]-\frac{1}{2};\frac{1}{2}]$ sur $]-\infty;\ln 2-\frac{1}{2}]$ qui contient 0